

# 變速箱震動的動態模型分析

b07611002 鄭泊聲

June 25, 2021

## 摘要

本報告主要欲探討的論文為 2018 年 *Acta Mechanica* 期刊上之論文 *On the nonlinear dynamics of shift gearbox models* [1]，其內容為建立一個能描述變速箱震動情形的動態模型。這篇論文中主要針對離合器 (Disk clutch) 與傳動齒輪的動態進行分析。

這篇報告則從該篇論文出發，另外集合了其他篇文獻的內容，以概略的介紹變速箱的震動模型為目的。首先簡單的描述由離合器碟片晃動 (wobbling) 所產生的動態模型，接著說明由傳動齒輪運動所生的震動，作為本論文模型的背景介紹。以此為基礎，在正式進入本論文的模型後，首先重新在離合器與齒輪的運動模型中納入黏彈性接觸 (viscoelastic contact)，接著對模型的穩定性與非穩態運動進行分析。

關於非線性動態模型的求解與數學運算，筆者相對不熟悉，也並不是本報告的主題，因此多數運算過程皆已省略，僅保留部分，以呈現出原作者的分析手法。

## 1 總覽

本篇報告希望概略的介紹能夠呈現出變速箱震動的動態模型與研究手法。簡單說明本報告的內容，有以下幾個重點：

1. 首先簡單的說明了第一種分析之角度，即離合器片的晃動模型，這樣的模型在作者先前的文獻中呈現出了一個 200Hz 左右的震動。
2. 接著介紹另一種由齒輪運動所造成的振動模型，該模型在先前的文獻中則呈現出了 300Hz 左右的震動。
3. 以此為基礎，在本論文的模型中，首先以黏彈性接觸重新對離合器與齒輪的運動進行描述。

- 在此處作者從接觸面的張力出發，推導機構的運動方程式，重新建立一個非線性的動態模型。
4. 接著首先探討這個系統在定態的運動，並發現齒輪軸的旋轉中心在定態模型中即會有偏移。
  5. 在進入非穩態分析前，首先對這個動態模型進行穩定性分析。
    - (a) 畫出模型在參數域的哪些區域能維持穩態。
    - (b) 討論不同的參數設定對系統穩定性的影響。
  6. 進入非穩態的區域，描繪出非穩態情形下的震動，其中在 400Hz 處有一個明顯的震動。
  7. 最後則簡單的探討了不同參數對於系統的非穩態運動有何影響。

如前所述，分析過程中多數的數學運算過程已被筆者省略，但仍有載明各種分析方法與數學工具。明顯地，本報告的內容，除了分析的機構 (離合器、齒輪) 為課本所涵蓋的元件外，在分析方法上與課程內容有著根本性的差異。本學期課程的內容主要採取靜力學的角度，研究機械元件是否能夠承受給定的負荷。而本篇報告的內容則完全屬於動力學的立場，研究機械元件的運動情形。除此之外，尚有其他可與課程內容比較之處。筆者在撰寫報告期間，由於這樣的兩相比較，因而對於兩個研究領域的範圍與方法差異更有深刻體會。也僅在此列出其他幾項本課程與本報告的異同：

- **靜態模型與動態模型** 在課程中，多數的問題都能透過靜態的數學模型求解。隨時間變化的週期性負荷，也以平均應力與振幅應力等方式描述，在靜態的數學模型 (如 S/N curve, Basquin's equation) 中運算。而本報告的範疇則皆須以動態的數學模型求解，所有隨時間變動的運動狀態都以方程式描述。
- **多組座標系統** 在課程中，多數問題都不會使用到超過一組座標系統。然而在複雜的運動狀態下，本報告中多處使用到超過一組的座標系統。
- **材料性質的重要性相同** 在靜力學的問題中，材料的性質，如抗拉強度、疲勞限等，時常是影響一個問題最重要的因素。在本報告針對非穩態運動的分析中，材料的性質 (阻尼、彈性係數) 依然非常關鍵，其重要性超過其他人力操作相關的參數。(見5.2節)

- **鋼體接觸的假設** 在課程中，多數情形下皆假設材料為鋼體，接觸時不會變形。然而本報告中將材料可能產生變形的黏彈性接觸納入考量。不過有趣的是，多數時候這對分析結果的影響似乎並不大。(見4,5.1節)
- **對離合器的分析異同**
  - 課本內假設作用於離合器上之壓力或繡蝕 (wear) 為均勻分布，而本報告中離合器上沒有任何作用為均勻分布，在晃動分析的模型上尤為明顯。
  - 本報告與課本對離合器的分析都一樣關注其壓力與摩擦力，只是課本研究其所造成的繡蝕，本報告則探討所造成的震動。
  - 課本上對於離合器片上的扭力，採取面積分，而本報告中則假設摩擦環為一圓，對其做環積分。(見8,9式)
  - 課本上對於離合器接觸面的模型忽略了接觸面的彈簧 (Diaphragm spring)，而本報告的模型則有納入這個多數離合器皆裝設有的裝置。(見圖6)
- **對齒輪的分析異同**
  - 課本著重於齒輪的「側面」，了解其幾何設計，而本報告則著重於齒輪的「齒接觸面」，分析其運動狀態。
  - 課本上對於兩齒輪運動時的相對關係描述，在本報告中也有應用，例如齒接觸面的法向量與基圓相切等。

## 2 模型背景介紹

作為一輛汽車中最複雜也最重要的部件之一，變速箱負責將引擎之動力傳遞至輪軸上，其最關鍵的工作在於以不同的齒比，以引擎所輸出的動力，傳遞不同大小的扭力至輪上。在更換齒輪檔位的過程中，離合器 (clutch) 負責了動力輸入輸出軸和引擎曲軸的分開與嚙合。現今多數車輛所採用的離合器為碟片式離合器，在引擎區軸上裝有離合器片，在傳動軸端裝有壓力片 (pressure plate)，在兩碟片接觸時透過摩擦力使兩碟片同步轉動。然而在車輛行進的過程中，碟片式離合器會產生振動與噪音，影響車輛的行駛品質。本論文即希望以非線性動態模型來描述這些震動，藉以在變速箱的設計上，能夠降低振動與噪音，提升車輛行駛的品質。

除了本論文針對非穩態、非線性的分析外，作者在更早期的文獻中亦曾探討其他形式或來源的離合器震動。本報告作為對於變速箱震動動態模型分析的初步介紹，我認為值得在此介紹以下兩種動態模型。

## 2.1 離合器碟片晃動分析

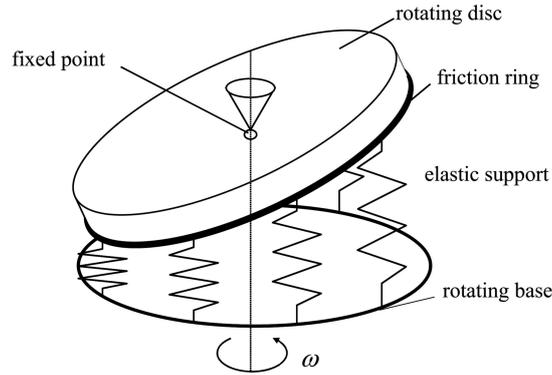


圖 1: 簡單晃動分析的模型 [2]

兩個旋轉中的摩擦碟片在接觸時，若彼此沒有以完全平貼的角度接觸，即會產生不均勻的摩擦力分布，並使其在旋轉過程中產生震動。在最簡單的模型中，可透過三組座標系統來描述這樣的裝置，如圖2所示，首先是空間向量  $(x, y, z)$ ，接著是磨擦碟片平面的空間座標  $(\xi, \eta, \zeta)$ ，最後是描述碟片晃動的  $(\alpha, \beta)$  座標，分別代表  $\xi$  軸的轉動與  $\eta$  軸的轉動。在這樣的設定下，我們可以得出一組運動方程式<sup>1</sup>

$$J_e \ddot{\alpha} + b \dot{\alpha} + (\pi R^2 C + 2\pi F_{e0} h) \alpha - \pi \mu h R C \beta = 0 \quad (1)$$

$$J_e \ddot{\beta} + b \dot{\beta} + (\pi R^2 C + 2\pi F_{e0} h) \beta + \pi \mu h R C \alpha = 0 \quad (2)$$

其中， $J_e$  為轉動慣量，碟片半徑為  $R$ ，厚度為  $2h$ ， $\mu$  為動摩擦係數， $C$  為彈簧的彈性係數， $F_e$  應為彈力的合力。而這組方程式即是一組非穩態的線性系統。  
[2]

建立於這樣的基礎上，作者在隨後的文獻中 [3]，引入了摩擦力所生阻尼 (friction induced damping) 的概念，並建立出一個離合器震動的動態模型，在非穩態的條件下呈現出一個約在 200Hz 左右的晃動。關於這個模型，僅在此簡單介紹關鍵的摩擦力所生阻尼之概念。

<sup>1</sup>推導過程還使用小角度三角函數的線性化等，並對碟片的摩擦力與扭力進行分析，詳見原文獻。[2]

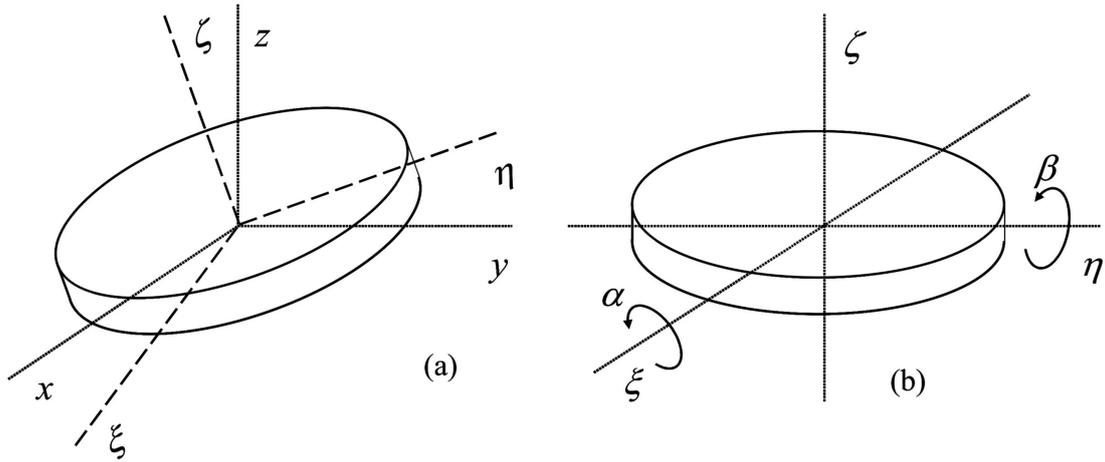


圖 2: 晃動分析的座標系統

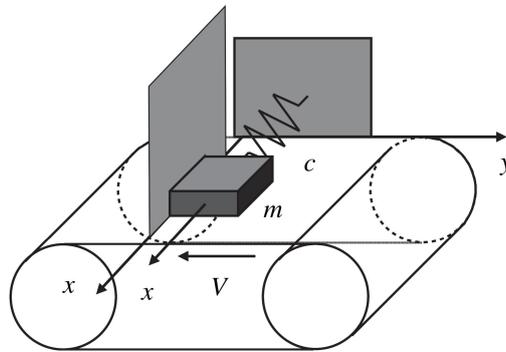


圖 3: 摩擦力所生阻尼之概念

### 2.1.1 摩擦力所生阻尼之概念

考慮圖3中的質量  $m$ ，他的運動方程式為

$$m\ddot{x} + cx = -\mu N \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + V^2}}$$

假設  $\dot{x} \ll V$ ，上式右邊的摩擦力即可被線性化，並整理得

$$m\ddot{x} + \mu N \frac{\dot{x}}{V} + cx = 0$$

其中即含有由摩擦力所生的阻尼項  $\mu N \frac{\dot{x}}{V}$ 。

## 2.2 傳動齒輪與離合器之關係

除了上述的晃動，離合器的震動還可能來自動力輸入與輸出軸上的齒輪運動。作者在先前的文獻中 [4]，透過齒輪與離合器片的運作關係，建立了一個動態模型，

在非穩態的條件下呈現出 300Hz 左右的軸向飄移震動 (axial flutter)。在此簡單描述作者如何對齒輪與離合器片的運動與摩擦力進行分析。而本節的分析也將是本篇論文稍後加入黏彈性分析前的模型基礎。

### 2.2.1 齒輪的運動

在這個模型中，僅考慮兩個不同齒比的齒輪，其各有兩種運動的自由度，分別是軸向轉動  $\varphi_i$  與旋轉中心的位移運動  $\mathbf{u}_i = u_i \mathbf{e}_x + v_i \mathbf{e}_y + w_i \mathbf{e}_z$ 。粗體  $\mathbf{e}$  指的是不同方向的單位向量。為了描述齒輪的運動，作者首先從齒面的幾何形態出發。如圖4所示，齒輪 1 為驅動齒輪，齒輪 2 為從動齒輪， $q$  為齒面的弧長方向， $\beta_b$  為齒輪的螺旋角度 (helical gearing angle)， $r_i$  為齒輪基圓的半徑，齒輪的齒面描述為

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i + r_i((\cos\gamma_i + q\sin\gamma_i)\mathbf{e}_x + (q\cos\gamma_i - \sin\gamma_i)\mathbf{e}_y) + z\mathbf{e}_z$$

其中  $\gamma_1 = q + \tan\beta_b \frac{z}{r_1} - \varphi_1(t)$ ,  $\gamma_2 = q - \tan\beta_b \frac{z}{r_2} + \varphi_2(t)$ 。分別將這個平面方程式對  $q$  方向與  $z$  方向偏微分，即可以得出兩方向上的切線向量，將這兩個切線向量做外積並標準化，即可得到齒面的單位法向量，其中，齒輪 1 的齒面單位法向量為

$$\mathbf{n}_1 = \sin\gamma_1 \mathbf{e}_x + \cos\gamma_1 \mathbf{e}_y + \tan\beta_b \mathbf{e}_z \quad (3)$$

而齒輪 2 的齒面單位法向量為

$$\mathbf{n}_2 = \sin\gamma_2 \mathbf{e}_x + \cos\gamma_2 \mathbf{e}_y - \tan\beta_b \mathbf{e}_z \quad (4)$$

在此可見， $\gamma_i$  即為齒面法向量  $\mathbf{n}_i$  在  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  平面上的角度。接著即可求出兩個齒面在單位法向量方向上的速度投影，分別是齒輪 1 的

$$v_{1n} = \dot{\mathbf{x}}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \dot{u}_1 \sin\gamma_1 + \dot{v}_1 \cos\gamma_1 + \dot{w}_1 \tan\beta_b + r_1 \dot{\varphi}_1$$

，以及齒輪 2 的

$$v_{2n} = \dot{\mathbf{x}}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \dot{u}_2 \sin\gamma_2 + \dot{v}_2 \cos\gamma_2 - \dot{w}_2 \tan\beta_b - r_2 \dot{\varphi}_2$$

其中  $\dot{\mathbf{x}}_i$  為齒面的速度。在兩齒輪運動的過程中，所有的接觸點上  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  皆成立，且這兩個法向量永遠與齒輪的基圓相切，如圖4上的 P 點與 K 點。比較  $\mathbf{n}_1$  與  $\mathbf{n}_2$  的係數後，可以得到  $\gamma_1 = \alpha_t$  以及  $\gamma_2 = \pi + \alpha_t$ ，因此

$$\begin{aligned} 0 &= v_{1n}\gamma_1 + v_{2n}\gamma_2 = v_{1n}\alpha_t + v_{2n}(\pi + \alpha_t) \\ &= (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)\sin\alpha_t + (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)\cos\alpha_t + (\dot{w}_1 - \dot{w}_2)\tan\beta_b + r_1\dot{\varphi}_1 - r_2\dot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

如此即將兩傳動軸的轉動與旋轉中心的位移之關係透過齒輪的幾何建立起來。

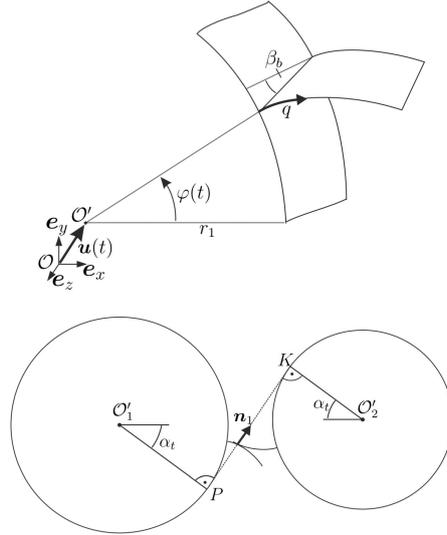


圖 4: 齒輪齒面的運動。上圖: 齒面的幾何。下圖: 兩齒輪的運動關係。

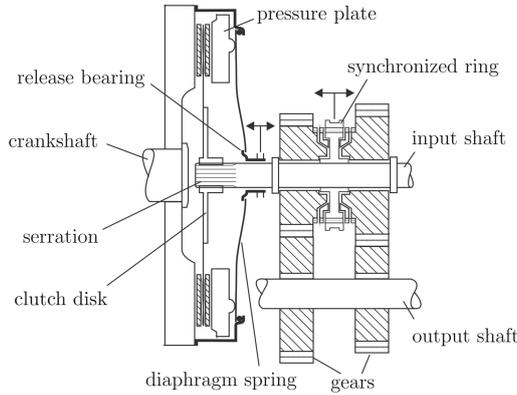


圖 5: 離合器的簡圖。

### 2.2.2 離合器片的摩擦力

所謂離合器片的摩擦力，指的是兩個摩擦碟片接觸並旋轉時，其之間的摩擦力。作者在更早期的文獻中 [5]，對兩旋轉碟片之間的摩擦力有詳細的推導，在此僅列出作者在模型建構中所使用的結果。由於此處旋轉中的摩擦碟片，實際上就是與上節的齒輪軸相接，因此其一端有旋轉中心的位移運動  $\mathbf{u}_1 = u_1\mathbf{e}_x + v_1\mathbf{e}_y + w_1\mathbf{e}_z$ ，而離合器片的旋轉速度為  $\dot{\varphi}_1\mathbf{e}_z$ ，另一邊加壓片 (pressure plate) 的旋轉速度為  $\Omega\mathbf{e}_z$ ，關於離合器的基本構造，可以參考圖5。離合器片接觸面的摩擦力  $F_R$  為

$$F_{R,x} \approx -\mu \frac{F_N}{\bar{v}_r} (\dot{u}_1 + \Omega v_1) \left(1 - \frac{R^2(\Omega - \dot{\varphi}_1)^2}{2\bar{v}_r^2} + \frac{3}{4}\Phi\right)$$

$$F_{R,y} \approx -\mu \frac{F_N}{\bar{v}_r} (\dot{v}_1 + \Omega u_1) \left(1 - \frac{R^2(\Omega - \dot{\varphi}_1)^2}{2\bar{v}_r^2} + \frac{3}{4}\Phi\right)$$

而其摩擦扭力 (friction torque) 為

$$M_{R,z} \approx \mu \frac{F_N}{\bar{v}_r} (\Omega - \dot{\varphi}_1) \left(1 - \frac{v_{xy}^2}{2\bar{v}_r^2} + \frac{3}{4}\Phi\right)$$

其中

$$\begin{aligned} v_{xy}^2 &= (\dot{u}_1 + \Omega v_1)^2 + (\dot{v}_1 - \Omega u_1)^2 \\ \bar{v}_r^2 &= v_{xy}^2 + R^2(\Omega - \dot{\varphi}_1)^2 \\ \Phi &= \frac{R^2(\Omega - \dot{\varphi}_1)^2}{2\bar{v}_r^2} \frac{v_{xy}^2}{\bar{v}_r^2} \end{aligned}$$

### 3 黏彈性接觸

以上的敘述，僅是對變速箱運動的模型基礎，描述離合器片與齒輪的運動狀態，但其設定尚未加入本論文的第一個重點—黏彈性接觸。在以下的範圍，則正式進入本論文的主要內容。接續上節對於離合器片與齒輪的運動關係，本論文不會再納入對離合器片晃動的分析。接著，為了要以黏彈性接觸的設定，重新描述離合器片與齒輪的運動狀態，作者從接觸面的張力出發，導出兩碟片之間的接觸力作功，藉以描述兩者的運動。

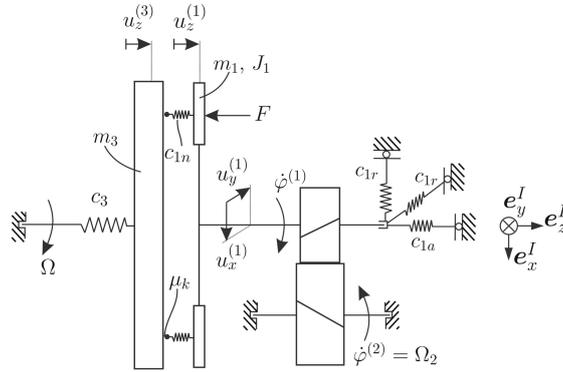


圖 6: 本模型的簡圖。

#### 3.1 離合器片的黏彈性接觸

首先，重新描繪離合器片的接觸與運動情形。簡言之，作者假設接觸面之間存在一組彈簧與阻尼，導出兩旋轉中摩擦碟片之間，在旋轉的法線方向與切線方向的張力  $\mathbf{t}$ ，分別為法線方向的

$$\mathbf{t}_n = \begin{cases} \left(\frac{c_n}{2\pi R}g + \frac{d_n}{2\pi R}\frac{\partial g}{\partial t}\right)\mathbf{e}_n, & g < 0 \wedge \left(\frac{c_n}{2\pi R}g + \frac{d_n}{2\pi R}\frac{\partial g}{\partial t}\right) < 0 \\ 0 \cdot \mathbf{e}_n, & \text{else} \end{cases} \quad (6)$$

以及切線方向的

$$\mathbf{t}_t = \begin{cases} \mu |\mathbf{t}_n| \frac{\mathbf{v}_T}{|\mathbf{v}_T|}, & |\mathbf{v}_T| \neq 0 \\ finite, & |\mathbf{v}_T| = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中  $v_T$  是接觸面的相對速度， $|\mathbf{v}_T| \neq 0$  代表兩個摩擦碟片的旋轉有滑移 (sliding)， $|\mathbf{v}_T| = 0$  代表兩碟片的旋轉完全同步 (sticking)。  $g$  所代表的是兩碟片在運動時之間間隙， $\mu$  是動摩擦係數。而  $\frac{c_n}{2\pi R}$ ,  $\frac{d_n}{2\pi R}$  兩項則為模型中的參數，分別代表材料特徵，接觸面的彈性係數與阻尼，與其他數個參數，在稍後的分析中會是影響結果的重要因素。

透過接觸張力，可以推導出兩碟片之間接觸力所作之功，在旋轉軸的方向為

$$\delta W_{c,n} = -(\delta \mathbf{u}_1 - \delta \mathbf{u}_3) \cdot \oint \mathbf{t}_n ds = -(\delta \mathbf{u}_1 - \delta \mathbf{u}_3) \cdot \mathbf{f}_{c,n} \quad (8)$$

在旋轉的切線方向為

$$\delta W_{c,t} = -\delta \mathbf{u}_1 \cdot \oint \mathbf{t}_t ds - \delta \varphi_1 \cdot \oint \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{t}_t ds = -\delta \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{f}_{c,t} - \delta \varphi_1 \cdot \mathbf{m}_{c,t} \quad (9)$$

在此， $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3$  分別為離合器片與加壓片的旋轉中心位移，由於一般離合器上離合器片與加壓片的接觸面積為一環型，在此作者將此接觸環視為一圓，並將張力對此圓環積分，故  $ds$  即為接觸環的圓弧長度。另外， $\varphi_1$  為兩碟片的旋轉向量， $\rho$  為加壓片的半徑。顯然， $\mathbf{f}_{c,n}$  即為離合器接觸面的正向力， $\mathbf{f}_{c,t}$  為摩擦力，而  $\mathbf{m}_{c,t}$  為其摩擦扭力。

### 3.2 齒輪的黏彈性接觸

與前述的離合器片在相同的黏彈性假設下，加入  $d$  作為齒輪的厚度，作者提出驅動齒輪 (齒輪 1) 的接觸張力

$$\mathbf{t}_n^1 = \begin{cases} (\frac{c_n}{d} g + \frac{d_n}{d} \frac{\partial g}{\partial t}) \mathbf{e}_n^1, & g < 0 \wedge (\frac{c_n}{d} g + \frac{d_n}{d} \frac{\partial g}{\partial t}) < 0 \\ 0 \cdot \mathbf{e}_n^1, & else \end{cases} \quad (10)$$

延續前述對齒輪幾何進行描述時所使用的符號 (見2.2.1節)，並以  $l$  描述兩齒輪的接觸長度，經過與上節類似的積分後，此處齒輪接觸力的作功為 (齒輪 1，與離合器相接的驅動齒輪)

$$\delta W_g = (-r_1 \delta \varphi_1 \cos \beta_b - \delta u_1 \sin \alpha_t \cos \beta_b - \delta v_1 \cos \alpha_t \cos \beta_b - \delta w_1 \sin \beta_b) \cdot \frac{l}{d} (c_n g + d_n \frac{\partial g}{\partial t}) \quad (11)$$

此處  $\frac{l}{d}$  為一時間的函數。值得提出的是，根據 Deppler 等人所提出之定理 [6]，上式的最後兩項  $\frac{l}{d}(c_n g + d_n \frac{\partial g}{\partial t})$ ，在封閉接觸的條件以及特定的參數 ( $c_n, d_n$ ) 設定下，會收斂成一個常數項，並使得上式等同於描述鋼體接觸情況的形式。在分析上，黏彈性接觸下接觸力作功會隨時間變動 ( $\frac{l}{d}$  為一時間的函數)，而在鋼體接觸下則不會 ( $\frac{l}{d}$  等收斂至常數)。

## 4 定態的模型解

在完成離合器與齒輪的運動狀態描述後，作者首先假設其在定態 (stationary) 的情形下，也就是各軸的角速度維持一定值、加壓片上的壓力  $F$  也維持定值的情形下求解。在這樣的設定下， $\delta$  代表的即是兩個摩擦碟片 (離合器片與加壓片) 的角速度差，也就是兩者之間的滑移 (slip)。根據漢米頓原理 (Hammilton's priciple)，系統的運動方程式能夠從

$$\delta H = \int_{t_0}^{t_1} \{\delta(T) - \delta(V_{bearing}) + \delta W_{dissipation} + \delta W_c + \delta W_g + \delta W_a\} dt \quad (12)$$

中推導出來。其中  $T$  為動能， $V_{bearing}$  為位能， $W_c$  與  $W_g$  即為前面所推導出的離合器與齒輪之接觸力作功， $\delta W_a$  應為加壓片所作之功， $\delta W_{dissipation}$  則為軸承上所散逸之能量。

所謂漢米頓原理的變分方法與求解過程太過艱難，也超過了本報告希望介紹之主題，在此就予以跳過。作者依據特定的參數設定<sup>2</sup>，在定態的設定下所求出之解答，即已經可以呈現出變速箱震動的重要性質。首先在圖7中可以見到，當加壓片所施加之壓力不為零時，離合器動力輸入軸的旋轉中心即會偏移，也就是前述齒輪模型中的  $u_i$ ，且其在  $y$  軸的偏移方向正好與滑移 ( $\delta$ ) 方向相反，而這個旋轉中心的  $y$  軸偏移方向，正好就是齒輪 1(驅動齒輪) 的接觸齒面法向量  $n_1$ (參見2.2.1節3式)，顯示出旋轉軸的位移受到齒論上接觸力的影響。圖8則呈現出對齒輪採取黏彈性假設與鋼體接觸假設時，旋轉軸偏移量絕對值的差異。可以看見其差異皆在奈米等級，非常微小，正好也符合前述由 Deppler 所提出的收斂關係。而圖9則呈現出不同的接觸面彈性係數與阻尼參數設定，會對旋轉軸偏移量有何影響。

## 5 系統的穩定性與非穩態分析

在進入本論文的另一個重點—非穩態分析前，作者首先希望提出該系統能維持在穩態的參數設定。非線性動態系統的穩定性求解與非穩態吸子 (attractor) 求解已

<sup>2</sup>相關參數記載於原文獻中表 1 中，族繁不及備載故不在此呈現

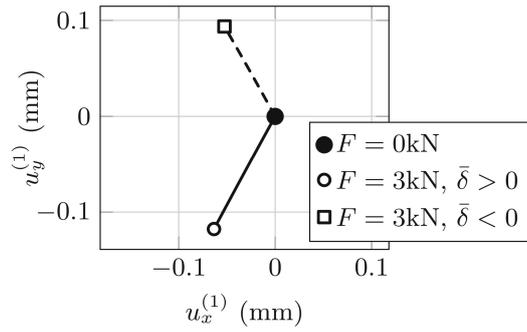


圖 7: 齒輪旋轉軸在中心  $x,y$  平面上的偏移量。

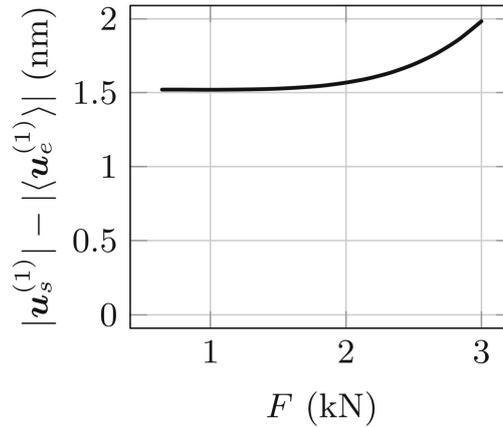


圖 8: 縱軸: 黏彈性接觸與鋼性接觸的旋轉軸中心位移量絕對值之差。橫軸: 加壓片所施之力。

超過筆者的學識範圍，在此僅簡單說明，本論文作者採用常見的李昂普諾夫漸進線穩定性 (Lyapunov stability) 求解。所得出的穩態範圍如圖所示。作者採用數值法所得之穩態範圍，與三個參數有關，分別是

- 齒輪螺旋角度  $\beta_b$ ，決定了齒輪軸向座標與旋轉座標系統的關係。
- 滑移方向  $sign(\delta)$ ，也代表了驅動齒輪的接觸齒面法向量  $\mathbf{n}_1$ 。
- $j_1 = \frac{J_1}{m_1 R^2}$ ，其中  $J_1$  為驅動齒輪的轉動慣量， $m_1$  為齒輪質量， $R$  為摩擦碟片的半徑。

## 5.1 穩定性邊界 (Stability Boundary)

在圖10中則可以發現，在動態的情形下，黏彈性接觸與鋼體接觸設定下的穩定性邊界 (圖10中的黑色與灰色實線) 近乎完全重疊，這再次的描繪了 Deppler 所提出的收斂關係。當滑移方向為正時，只有在  $(\beta_b > \frac{\pi}{4}, \tan\beta_b > 1)$  的範圍內，系統才

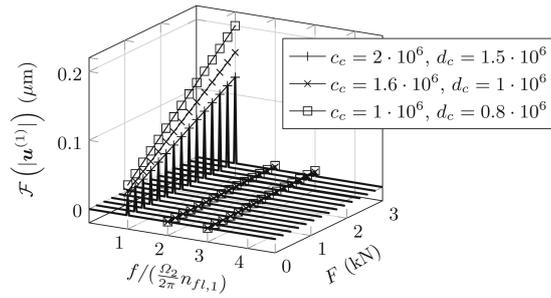


圖 9: 旋轉軸偏移量之幅度、meshing frequency 與加壓片所施之力。

會進入不穩定的狀態。而在滑移為負的情形下，只要  $j_1$  夠小，系統幾乎都會是非穩態。對於這樣的現象，作者並沒有提出太多說明，但他認為這樣的結果與變速箱的結構會有關係。作者也更進一步的分析出，在非穩態的情形下，其波動的頻率在 200-500Hz 之範圍內。而在靜態 (static) 的情形下，則無法呈現出黏彈性接觸設定的穩態邊界 (圖10中僅能看見灰色的虛線，不見黑色的虛線)，這意味著在靜態的情形下穩態邊界對表面接觸的參數 ( $c_n, d_n$ ) 將變得非常敏感。

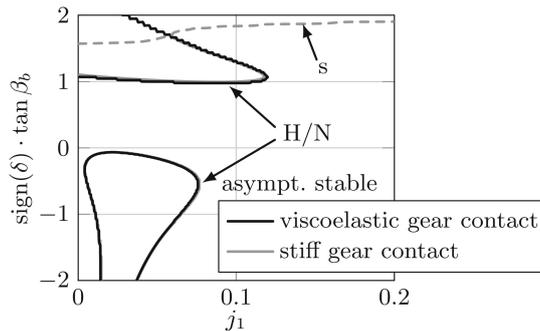


圖 10: 參數域的漸進線穩定性邊界。被曲線與圖表邊界包圍的區域為非穩態。

## 5.2 非穩態的分析

圖11呈現出在負滑移的不穩定區域內，離合器面間隙  $g_{clutch}$  (圖11a)、齒輪間隙  $g_{gear}$  (圖11b)、與齒輪軸的角速度 (圖11c) 隨時間的波動情形，而在圖11d 中則可以看見齒輪軸的旋轉中心位移為約 400Hz 的震動。作者成功地透過本模型描述出變速箱的各種震動情形。

在圖12中也可以看見離合器面間隙與旋轉角速度的吸子 (attractor)，是如何隨著加壓片的施力移動。在滑移為負的情形下 (圖12a)，離合器的加壓力越大，震動的幅度就越大，但值得注意的是，其圖形的形狀並不會改變，作者表示這意味著變速箱的震動情形並不會因為操作的參數而有顯著改變，應是材料的參數會有較

明顯的影響。而在正滑移的情形下 (圖12b)，其波動幅度隨加壓力的改變並不明顯，這是因為正滑移代表離合器片的角速度大於加壓片的角速度，當外部的加壓力減小時，摩擦力所產生的力矩，正好會形成一個「內生」的加壓力，將加壓片壓向離合器。

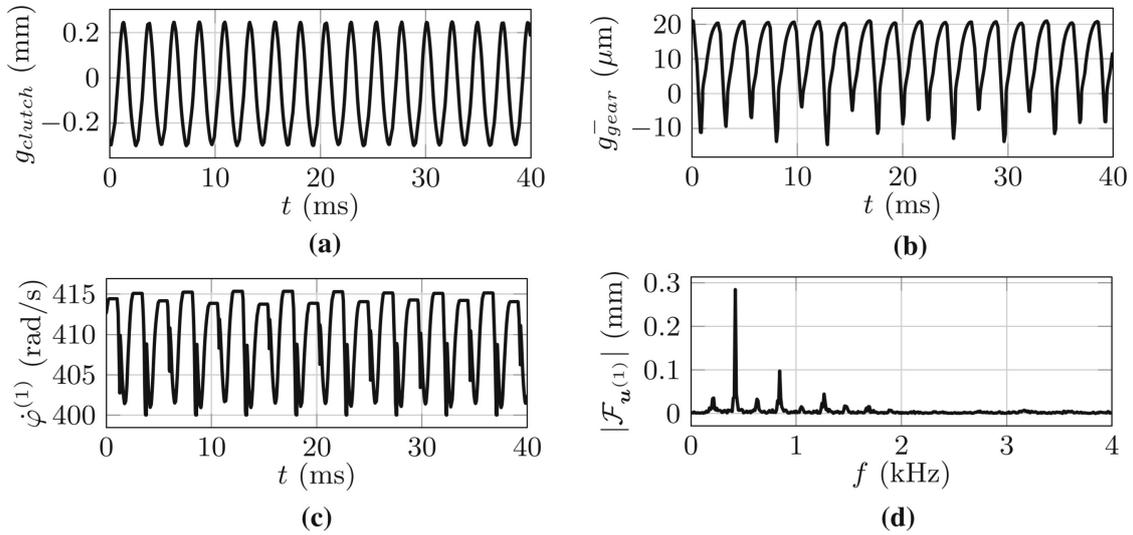


圖 11: 非穩態下的震動。

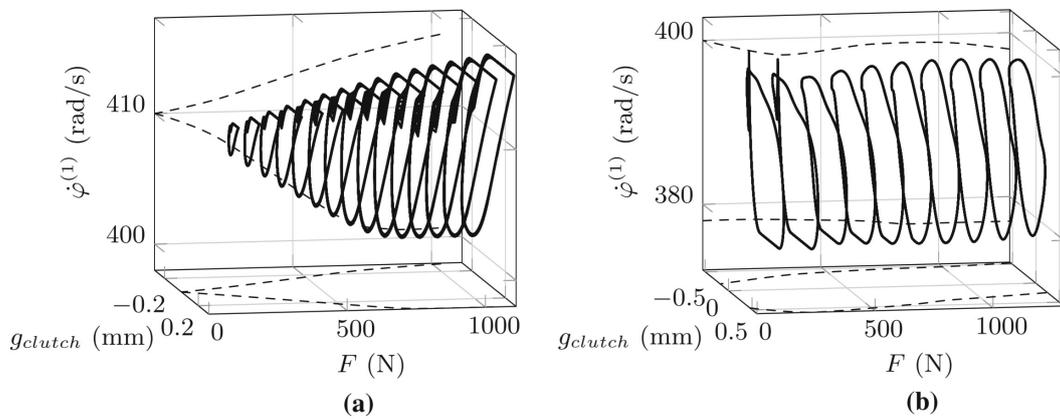


圖 12: 吸子 (attractor) 隨加壓力的改變。a: 負滑移。b: 正滑移。

除了上述的分析外，作者在原文獻中尚有更多對於非穩態吸子 (attractor) 的分析，但其一方面已超過筆者的學識程度，另一方面也已經脫離本報告希望介紹變速箱震動的目的。值得提出的是，作者最後將各式非穩態的邊界重新繪製於圖10中，對於這個變速箱非線性動態系統的非穩態解有更深入的描繪，僅在此將圖13附上。

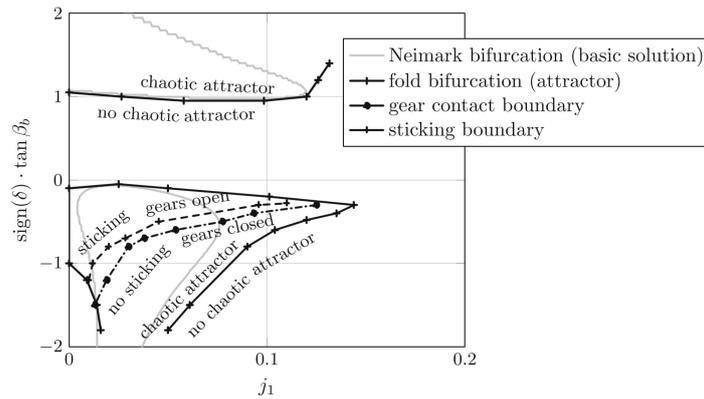


圖 13: 穩定性邊界與吸子 (attractor) 的位置改變。

## References

- [1] Georg Jehle and Alexander Fidlin. “On the nonlinear dynamics of shift gear-box models”. In: *Acta Mechanica* 229.6 (June 2018), pp. 2327–2341. ISSN: 1619-6937. DOI: [10.1007/s00707-018-2110-x](https://doi.org/10.1007/s00707-018-2110-x). URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2110-x>.
- [2] Alexander Fidlin. *Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. ISBN: 978-3-540-28115-3. DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-28116-9>.
- [3] Alexander Fidlin, Olga Drozdetskaya, and Bernd Waltersberger. “On the minimal model for the low frequency wobbling instability of friction discs”. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 30.5 (2011), pp. 665–672. ISSN: 0997-7538. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.03.009>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S099775381100043X>.
- [4] G. Jehle and A. Fidlin. “Friction induced vibrations in shift gearboxes”. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 94.11 (2014), pp. 911–916. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201300252>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/zamm.201300252>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/zamm.201300252>.

- [5] A. Fidlin and W. Stamm. “On the radial dynamics of friction disks”. In: *European Journal of Mechanics A-solids - EUR J MECH A-SOLID* 28 (May 2009), pp. 526–534. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.12.001.
- [6] B. Braun et al. “Convergence of Viscoelastic Constraints to Nonholonomic Idealization”. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 58 (Jan. 2016). DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.01.003.